

Aula 5 - Princípio de Hamilton (2.1-2.3)

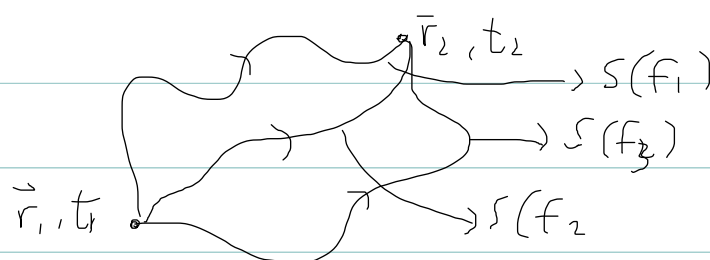
- Intro ao cálculo variacional
- Princípio de Hamilton
- Lagrangianas equivalentes

ref extra: Feynman II-19

Vimos como as eqs. de Lagrange resultam das eqs de Newton, no caso de vínculos ideais, via o princípio de D'Alembert

Vamos agora reobê-las de um modo completamente diferente, e que levará a diversos desdobramentos posteriores

Idéia: suponha que uma partícula está em $\vec{r}_1$ no instante t_1 , e precisa chegar até $\vec{r}_2$ no instante t_2 . Dentre todas as trajetórias possíveis, ela "escolhe" uma $\rightarrow$ a solução das eqs de movimento.



Hamilton descobriu uma maneira de identificar essa trajetória por meio de uma extremalização. Ele descobriu que existe para cada trajetória um $n^\circ S$, chamado "ação", que é minimizado (mais geralmente, extremalizado) pela trajetória física.

Para cada trajetória indo de $(\vec{r}_1, t_1)$ a $(\vec{r}_2, t_2)$: $S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) dt$

→ prob. (2.2)

exemplo: partícula em queda livre. Chamemos de $\vec{r}_f(t)$ a trajetória física

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{r}_f(t)}_{\text{solução física}} + \vec{\eta}(t), \quad \vec{\eta}(0) = \vec{\eta}(T) = 0$$

Eqs movimento: $\ddot{r}_{fx} = 0, \quad \ddot{r}_{fy} = -g$

$$\text{Ação p/ } \vec{r}: S = \int_0^T L(r, \dot{r}, t) dt = m \int_0^T \frac{\dot{r}_x^2 + \dot{r}_y^2}{2} - g r_y dt$$

$$= S_f + m \int_0^T \dot{r}_{fx} \dot{\eta}_x + \dot{r}_{fy} \dot{\eta}_y + \frac{|\dot{\eta}|^2}{2} - g \eta_y dt$$

int. p/ partes

$$= S_f + m \int_0^T \cancel{\ddot{r}_{fx} \eta_x} - \cancel{\ddot{r}_{fy} \eta_y} - \cancel{g \eta_y} + \frac{|\dot{\eta}|^2}{2} dt$$

$$+ \underbrace{\dot{r}_{fx} \eta_x + \dot{r}_{fy} \eta_y}_0 \Big|_0^T$$

$$= S_f + \underbrace{\frac{m}{2} \int_0^T |\dot{\eta}|^2 dt}_{\geq 0}$$

$$\geq 0, = 0 \Leftrightarrow \dot{\vec{\eta}} \equiv 0 \Leftrightarrow \vec{\eta} \equiv 0$$

Antes de explicar melhor o que é a ação $\rightarrow$ repare que ela não é uma função comum, pois assume um valor ^{distinto} para cada curva $\vec{r}(t)$ (com início e fim fixos). É uma "função de uma função", tb conhecida como um funcional (ie, S toma valores em um espaço de funções)

Exemplo de objeto desse tipo: comprimento de curva

Suponha ainda que as curvas que vamos olhar têm a forma $(x, y(x))$ então seu comprimento é

$$S[y] = \int_1^2 ds = \int_1^2 \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

Mais geralmente, vamos estar interessados em funcionais de forma

$$J_f[y] = \int_1^2 f(y, y', t) dt \quad \text{onde } f \text{ é dada}$$

e em encontrar a curva $y(t)$ que minimize o valor de $J_f[y]$

Podemos reduzir esse problema a uma minimização usual de cálculo restringindo o universo de curvas possíveis àquelas da forma

$$\bar{y}(t) \equiv y(t) + \epsilon \eta(t) \quad , \quad \text{onde } \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$$

Para η dado, o funcional se reduz a uma função comum de ε

$$\phi(\varepsilon) = J[\bar{y}]$$

como, por hipótese, J é estacionário em y , então necess.

$$0 = \left. \frac{d\phi}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}}_{\eta} \underbrace{\frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon}}_{\dot{\eta}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{\bar{y}}}}_{\dot{\eta}} \underbrace{\frac{\partial \dot{\bar{y}}}{\partial \varepsilon}}_{\ddot{\eta}} \right) dt \quad (\text{válido p/ qd } \eta)$$

int. por partes
o 2º termo

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{\bar{y}}} \right) \eta dt + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\bar{y}}} \eta \right|_{t_1}^{t_2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{t.b. usamos} \\ \bar{y}|_{\varepsilon=0} = y \end{array} \right)$$

Como isto vale p/ todo η satisfazendo as conds de borda, então

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{\bar{y}}} = 0$$

Eq. de Euler = cond.
necessária p/ y ex

intuição da demonstração (v. texto p/ detalhes).



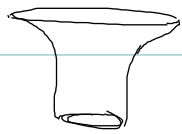
Se $M(t) \neq 0$, sempre
 $\exists \eta$ tal que $\int M \eta dt \neq 0$.

Notar semelhança com eq. de Lagrange!

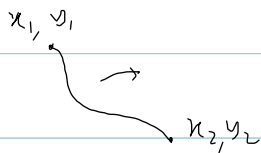
exemplos de problemas variacionais (v. texto)

- encontrar curvas de menor comprimento entre 2 pontos sobre uma superfície (geodésicas)

- encontrar a curva que resulta na menor sup. de revolução



- brachistócrona (curva que resulta no menor tempo de queda livre)



A partir de agora usamos a notação δy p/ variações

$$\text{i.e. : } \bar{y} = y + \delta y \quad ; \quad \delta y \equiv \varepsilon \eta \Rightarrow \delta(\dot{y}) = \varepsilon \dot{\eta} = \frac{d}{dt}(\delta y)$$

$$\text{e tb } \delta J_f \equiv \varepsilon \left. \frac{d\Phi}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right) dt$$

$$\left[\text{int. por partes e usando } \delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0 \right] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \delta y \, dt$$

$\therefore J_f$ é extremo em y se $\delta J = 0$, $\forall \delta y$

ainda: J pode ser um funcional de muitas funções (análogo a uma função de muitas variáveis, i.e.

$$J = \int_{t_1}^{t_2} f(y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n, t) dt$$

Traduzindo agora p/ a mecânica: a ação de um sistema mecânico evoluindo de $t=t_1$ a $t=t_2$ é def. por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt$$

obs: muitas vezes abreviamos $S(q, \dot{q}, t)$

$$\text{Então } \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] \delta q_k dt$$

Se o sistema é holônomo, então é possível escolher coordenadas $q_1, \dots, q_n$ tais que cada variação δq_i seja independente das demais.

Assim podemos garantir que, se $\delta S = 0$ para δq_k 's arbitrários, é necessário que cada termo em colchetes se anule ie

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \rightarrow \text{eqs. de Lagrange}$$

Temos assim o **"Princípio de Hamilton"**: dado um sistema mecânico holônomo descrito pela Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, seu movimento entre $t=t_1$ e $t=t_2$ é tal que a ação $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ é estacionária (em geral, mínima) para a trajetória real, mantidos fixos os pontos inicial e final da trajetória no espaço de configuração.

comentário "filosófico": princípios variacionais como este parecem ter um caráter quase "mágico". Dá a impressão que o sistema precisa testar de alguma forma todas as trajetórias para então escolher aquela que minimiza/maximiza S .

Em contraste, na formulação Newtoniana o movimento é determinado a cada instante pelas propriedades locais do sistema (ua pos. e vel. instantâneas, e a força apenas naquele ponto).

Não há, é claro, contradição. Isso se percebe notando-se que o movimento precisa apenas externalizar S em cada trecho infinitesimal da trajetória, portanto usando mesmo apenas informações locais.